УДК 519.21

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРХНЕГО ГРАНИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ПРОЦЕССА ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ

Т.И.НАСИРОВА, Б.Г.ШАМИЛОВА
Бакинский Государственный Университет
bahar-shamilova@rambler.ru

В работе, пользуясь последовательностью независимых, одинаково распределенных двумерных случайных величин, строится скачкообразный процесс полумарковского блуждания с задерживающими экранами "a" *и* "b". *Получено интегральное уравнение для преобразования Лапласа распределения первого момента достижения экрана* "a". *Это уравнение решается в классе лапласовых распределений. С помощью полученного решения находится среднее значение первого момента достижения верхнего экрана полумарковским блужданием.*

Ключевые слова: случайная величина, процесс полумарковского блуждания, задерживающий экран, преобразование Лапласа, условное распределение, математическое ожидание, дисперсия.

Нахождению распределения времени первого момента пересечения экрана "0" посвящено немало работ $[1-4]$. В $[1, 237-238]$ получена явная формула для распределения первого момента достижения уровня нуль случайным блужданием, порожденным симметричными непрерывно распределенными величинами. В работах $[2, 26-51; \ 3, 69-76]$ изучены различные проблемы, связанные с граничными функционалами случайных блужданий. Когда блуждание происходит любым распределением, распределение первого момента пересечения уровня нуль изучено в $[4, 53]$.

В данной работе исследуется распределение первого момента пересечения уровня "a" скачкообразным процессом полумарковского блуждания с задерживающим экраном, в случае сложного распределения Лапласа.

Постановка задачи. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана последовательность $\{\xi_i(\omega), \eta_i(\omega)\}$, $i=\overline{1,\infty}$, независимых одинаково распределенных случайных величин и независимых между собою $\xi_i(\omega), \eta_i(\omega)$,

$i=\overline{1,\infty}$, где $\xi_i(\omega)>0$, $E\eta_1(\omega)>0$ и заданы числа a, b и z, так что $b>0$, $a>b$ и $0<z\le a-b$.

По этим случайным величинам построим процесс

$$X_1(t,\omega)=b+z+\sum_{i=1}^{k}\eta_i(\omega) \text{ если } \sum_{i=1}^{k}\xi_i(\omega)\le t<\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i(\omega),\ k\ge 0, \sum_{1}^{0}=0,$$

который будем называть скачкообразным процессом полумарковского блуждания.

Процесс, построенный следующим образом, называется процессом полумарковского блуждания с задерживающими экранами "b" и "a".

$$\mathrm{X}(\mathrm{t},\omega)=\zeta_{\mathrm{k}}(\omega), \text{ если } \sum_{i=1}^{k}\xi_i(\omega)\le t<\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i(\omega), k\ge 0 \ \left(\sum_{1}^{0}=0\right),.$$

$$\zeta_k(\omega)=\min\{a,\max\{b,\ \zeta_{k-1}(\omega)+\eta_k(\omega)\}\}, k\ge 1,$$

$$\zeta_0(\omega)=b+z.$$

Обозначим первый момент пересечения уровня a через $\tau_1^a(\omega)$.

Очевидно, что

$$\tau_1^a(\omega)=\inf\{t: X(t,\omega)=a\}$$

и $\tau_1^a(\omega)=\infty$, если для всех $t>0$ $X(t,\omega)<a$.

По формуле полной вероятности имеем

$$P\{\tau_1^a(\omega)>t/X(0,\omega)=b+z\}=P\{\xi_1(\omega)>t\}+$$

$$+\int_{s=0}^{t}\int_{y=b}^{a}P\{\tau_1^a(\omega)>t-s/X(0,\omega)=y\}\times$$

$$\times P\{\xi_1(\omega)\in ds; b+z+\eta_1(\omega)<a; \max[b,b+z+\eta_1(\omega)]\in dy\}. \qquad (1)$$

Цель в этой статье: найти преобразование Лапласа распределения случайной величины $\tau_1^a(\omega)$.

Метод решения.

Обозначим

$$L(\theta/b+z)=E\left(\ell^{-\theta\tau_1^a}/X(\theta)=b+z\right)=\int_{z=0}^{\infty}\ell^{-\theta t}d\mathrm{P}\{\tau_1^a(\omega)<t/X(0,\omega)=b+z\},$$

$$L(\theta)=Ee^{-\theta\tau_1^a(\omega)}=\int_{z=0}^{\infty}L(\theta,b+z)\mathrm{P}\{X\{0,\omega\}\in dz\},\quad \theta>0,$$

$$\varphi(\theta)=Ee^{-\theta\xi_1(\omega)}=\int_{t=0}^{\infty}\ell^{-\theta t}d\mathrm{P}\{\xi_1(\omega)<t\},\quad \theta>0.$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$L(\theta/b+z)=\varphi(\theta)P\{\eta_1(\omega)>a-b-z\}+\varphi(\theta)L(\theta/b)P\{\eta_1(\omega)<-z\}+$$
$$+\varphi(\theta)\int_{y=b}^{a}L(\theta/y)d_yP\{\eta_1(\omega)<y-b-z\}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) в общем случае для произвольно распределенной случайной величины $\eta_1(\omega)$ практически неразрешимо. Будем решать его, для частного случая, когда случайная величина $\eta_1(\omega)$ имеет сложное распределение Лапласа следующего вида:

$$P\{\eta_1<x\}=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}-\mu x\right)e^{\mu x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}$$

$$P_{\eta_1}(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mu^2}{\lambda+\mu}\left(\dfrac{1}{\lambda+\mu}-x\right)e^{\mu x}, & x<0,\ \mu>0,\\ \dfrac{\lambda^3}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\lambda x}, & x>0,\ \lambda>0.\end{cases}$$

Тогда уравнение (2) будет иметь вид:

$$L(\theta/b+z)=\frac{\lambda\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}+\mu z\right)e^{-\mu z}L(\theta/b)+\frac{\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\lambda(a-b-z)}+$$
$$+\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu(b+z)}\int_{y=b}^{b+z}ye^{\mu y}L(\theta/y)dy-$$
$$-\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}e^{-\mu(b+z)}\int_{y=b}^{b+z}ye^{\mu y}L(\theta/y)dy+$$
$$+\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)(b+z)}{\lambda+\mu}e^{-\mu(b+z)}\int_{y=b}^{b+z}ye^{\mu y}L(\theta/y)dy+$$
$$+\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{\lambda(b+z)}\int_{y=b+z}^{a}e^{-\lambda y}L(\theta/y)dy. \qquad (3)$$

Из этого интегрального уравнения получаем однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$L'''(\theta/b+z)-(\lambda-2\mu)L''(\theta/b+z)-\mu(2\lambda-\mu)L''(\theta/b+z)-$$
$$-\lambda\mu^2[1-\varphi(\theta)]L(\theta/b+z)=0,$$

которое имеет решение

$$L(\theta/b+z)=\sum_{i=1}^{3}c_i(\theta)e^{k_i(\theta)(b+z)}, \qquad (4)$$

где $k_i(\theta)$ $(i=1,2,3)$, корни характеристического уравнения

$$k^3(\theta)-(\lambda-2\mu)k^2(\theta)+\mu(\lambda-2\mu)k(\theta)+\lambda\mu^2[1-\varphi(\theta)]=0.$$

Для нахождения $c_i(\theta)\,(i=1,2,3)$ из интегрального уравнения (3) мы находим следующие граничные условия:

$$L(\theta/a)=\frac{\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}+\frac{\lambda(\lambda+2\mu)\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu(a-b)}L(\theta/b)+$$
$$+\frac{\lambda\mu(a-b)\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}e^{-\mu(a-b)}L(\theta/b)+\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}e^{\mu y}L(\theta/y)dy-$$
$$-\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}y\,e^{\mu y}L(\theta/y)dy+\frac{\lambda\mu^2 a\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}\,e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}e^{\mu y}L(\theta/y)dy,$$

$$L'(\theta/a)=\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}-\frac{\lambda\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu(a-b)}L(\theta/b)+\frac{\lambda\mu^2(a-b)\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}e^{-\mu(a-b)}(\theta/b)+$$
$$+\frac{\lambda^2\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}e^{\mu y}L(\theta/y)\,dy+\frac{\lambda\mu^3\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}y\,e^{\mu y}L(\theta/y)\,dy+$$
$$+\frac{\lambda\mu^3 a\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}\,e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}e^{\mu y}L(\theta/y)dy,$$

$$L''(\theta/a)=\frac{\lambda^2\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}-\frac{\lambda^2\mu^2\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu(a-b)}L(\theta/b)+$$
$$+\frac{\lambda\mu^3(a-b)\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}e^{-\mu(a-b)}L(\theta/b)-\frac{\lambda\mu^3(2\lambda+\mu)\varphi(\theta)}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}e^{\mu y}L(\theta/y)dy-$$
$$-\frac{\lambda\mu^4\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}y\,e^{\mu y}L(\theta/y)dy+\frac{\lambda\mu^4 a\varphi(\theta)}{\lambda+\mu}\,e^{-\mu a}\int\limits_{y=b}^{a}e^{\mu y}L(\theta/y)dy.$$

Подставив решение (4) в последнею систему, получим следующую систему линейных алгебраических неоднородных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{3}c_i(\theta)\{[\lambda-k_i(\theta)]k_i(\theta)[\lambda+2\mu+k_i(\theta)+(\lambda+\mu)[\mu+k_i(\theta)](a-b)]x$$
$$xe^{-\mu a+[\mu+k_i(\theta)]b}+\lambda[\mu+k_i(\theta)]^2e^{k_i(\theta)a}\}=\lambda\mu^2\varphi(\theta),$$
$$\sum_{i=1}^{3}c_i(\theta)\left\{\mu[\mu+k_i(\theta)]^2e^{k_i(\theta)a}-[\lambda-k_i(\theta)][\mu+k_i(\theta)]k_i(\theta)e^{-\mu a+[\mu+k_i(\theta)]b}\right\}=$$
$$=\mu^3\varphi(\theta),$$
$$\sum_{i=1}^{3}c_i(\theta)\left\{\lambda[\mu+k_i(\theta)]^2e^{k_i(\theta)a}+[\lambda-k_i(\theta)][\mu+k_i(\theta)]k_i(\theta)e^{-\mu a+[\mu+k_i(\theta)]b}\right\}=$$
$$=\lambda\mu^2\varphi(\theta).$$

Из этой системы находим, что

$$\left.\begin{aligned}
c_1(\theta) &= \frac{\mu^2\varphi(\theta)\left[\mu+k_1(\theta)\right]^2\left[k_3(\theta)-k_2(\theta)\right]k_2(\theta)k_3(\theta)e^{\left[k_2(\theta)+k_3(\theta)\right]b}}{l},\\
c_2(\theta) &= -\frac{\mu^2\varphi(\theta)\left[\mu+k_2(\theta)\right]^2\left[k_3(\theta)-k_1(\theta)\right]k_1(\theta)k_3(\theta)e^{\left[k_1(\theta)+k_2(\theta)\right]b}}{l},\\
c_3(\theta) &= \frac{\mu^2\varphi(\theta)\left[\mu+k_3(\theta)\right]^2\left[k_2(\theta)-k_1(\theta)\right]k_1(\theta)k_2(\theta)e^{\left[k_1(\theta)+k_2(\theta)\right]b}}{l},
\end{aligned}\right\}$$

где

$$\begin{aligned}
l = {} & \left[\mu+k_1(\theta)\right]^4\left[k_3(\theta)-k_2(\theta)\right]k_2(\theta)k_3(\theta)e^{k_1(\theta)a+\left[k_2(\theta)+k_3(\theta)\right]b} - \\
& -\left[\mu+k_2(\theta)\right]^4\left[k_3(\theta)-k_1(\theta)\right]k_1(\theta)k_3(\theta)e^{k_2(\theta)a+\left[k_1(\theta)+k_3(\theta)\right]b} + \\
& +\left[\mu+k_3(\theta)\right]^4\left[k_2(\theta)-k_1(\theta)\right]k_1(\theta)k_2(\theta)e^{k_3(\theta)a+\left[k_1(\theta)+k_2(\theta)\right]b}.
\end{aligned}$$

Найденные $c_i(\theta)$ $(i=1,2,3)$ поставив в (4) получим, что

$$\begin{aligned}
L(\theta/b+z) = {} & \frac{\mu^2\varphi(\theta)\left[\mu+k_1(\theta)\right]^2\left[k_3(\theta)-k_2(\theta)\right]k_2(\theta)k_3(\theta)e^{\sum_{i=1}^{3}k_i(\theta)b+k_1(\theta)z}}{l} - \\
& -\frac{\mu^2\varphi(\theta)\left[\mu+k_2(\theta)\right]^2\left[k_3(\theta)-k_1(\theta)\right]k_1(\theta)k_3(\theta)e^{\sum_{i=1}^{3}k_i(\theta)b+k_2(\theta)z}}{l} + \\
& +\frac{\mu^2\varphi(\theta)\left[\mu+k_3(\theta)\right]^2\left[k_2(\theta)-k_1(\theta)\right]k_1(\theta)k_2(\theta)e^{\sum_{i=1}^{3}k_i(\theta)b+k_3(\theta)z}}{l},
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \int_{z=0}^{a-b} L(\theta/b+z)dP\left\{X(0,\omega)<b+z\right\} = \\
&= \int_{z=0}^{a-b} L(\theta/b+z)dP\left\{\min(a,b+\eta_1^+(\omega))<b+z\right\} = \\
&= L(\theta/a)P\left\{\eta_1^+(\omega)>a-b\right\} - \int_{z=0}^{a-b} L(\theta/b+z)dP\left\{\eta_1^+(\omega)>z\right\}.
\end{aligned}$$

Итак

$$L(\theta) = e^{-\lambda(a-b)}L(\theta/a) + \lambda\int_{z=0}^{a-b} e^{-\lambda z}L(\theta/b+z)dz. \tag{5}$$

Теперь найдем $E\tau_1^a(\omega)$. По свойству преобразования Лапласа имеем:

$$E\tau_1^a(\omega) = -L('0).$$

Тогда из (5) получим:

$$D\tau_1^a(\omega) = L''(0) - \left[L'(0)\right]^2.$$

Из (5) можем найти асимметрию и другие характеристики распределения случайной величины $\tau_1^a(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 2003, 431 с.
2. Lotov V.I. On the asymptotic of distributions in two–sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain // Sib.Adv. Math. 1991, v.1, №2, p.26-51.
3. Япар Дж., Насирова Т.И., Ханиев Т.А. О вероятностных характеристиках уровня запаса в модели типа (s,S) // Кибернетика и системный анализ. 1998, №5, с. 69-76.
4. Насирова Т.И. Сложные процессы полумарковского блуждания при наличии экрана. Б.: Элм, 1988, 50 с.
5. Омарова К.К. Преобразования Лапласа распределения первого момента достижения нижнего уровня ступенчатым процессом полумарковского блуждения // Известия НАНА. Серия физ.-тех. и мат. наук. Информатика и проблемы управления. 2003, т. 23, №3, с. 129-132.

SEMİMARKOV DOLAŞMA PROSESİNİN YUXARI SƏRHƏD FUNKSİONALININ PAYLANMASININ LAPLAS ÇEVİRMƏSİ

T.H.NƏSİROVA, B.Q.ŞAMİLOVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə verilmiş ikiölçülü, asılı olmayan, eyni qanunla paylanan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığından istifadə edərək "b" və "a" ekranında gecikdirilən semimarkov dolaşma prosesi qurulur. Sonra birinci dəfə "a" ekranına çatma anının paylanmasının Laplas çevirməsi üçün inteqral tənlik alınır. Bu inteqral tənlik Laplas paylanmalar sinfində həll olunur. Tapılan həllin köməkliyilə birinci dəfə "a" ekranına çatma anının orta qiymәti tapılır.

Açar sözlər: təsadüfi kəmiyyət, təsadüfi dolaşma prosesi, gecikdirən ekran, Laplas çevirməsi, şərti paylanma, riyazi gözləmə, dispersiya.

THE LAPLACE TRANSFORMATION OF DISTRIBUTION OF THE UPPER BOUNDARY FUNCTIONAL FOR THE PROCESS OF SEMI-MARKOV RANDOM WALK

T.H.NASIROVA, B.G.SHAMILOVA

SUMMARY

In this work, using sequence of independent, identically distributed two dimensional random variables, the semi-Markov random walk with "b" and "a" delaying screens is constructed. The integral equation for the Laplace transformation of the first moment of reaching "a" delaying screen is constructed. This integral equation is solved in a class of Laplace distributions. With the help of the obtained solution, the mean value of the first moment of reaching the delaying screen is determined.

Key words: delaying barrier, semi-Markov walk, Laplace transformation, conditional distribution, expectation and variance.

Поступила в редакцию 09.01.2010 г.
Принято к печати 10.03.2011 г.